دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

«تمرین درس دینامیک سازه ها»

مجموعه تمرینات سری اول

استاد محترم: جناب آقای دکتر تقی خانی

دانشجو:
سینا کاظم زاده آزاد

شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

زمان تحویل: ۹۰/۷/۲۳

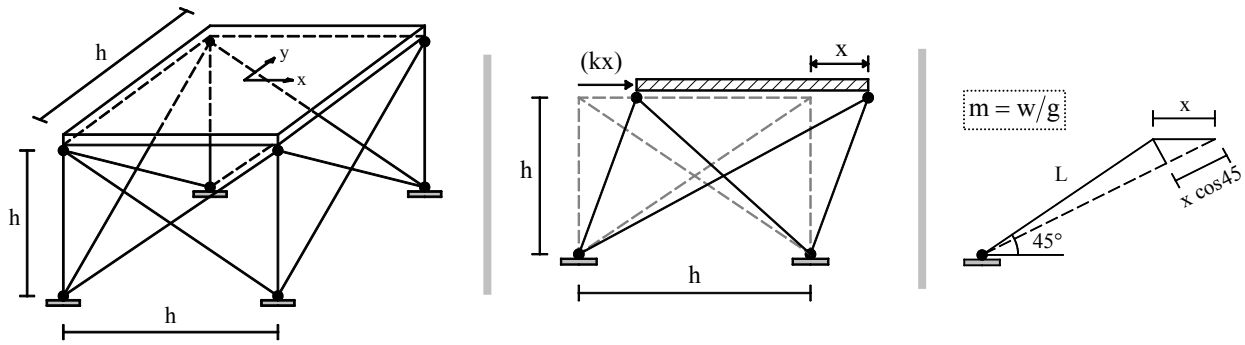
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

سینا کاظم زاده آزاد شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

مجموعه تمرینات شماره ۱ درس دینامیک سازه ها: (موعد تحویل: ۹۰/۷/۲۳)

۱) کف صلبی به وزن کل w مطابق شکل زیر توسط چهار ستون دو سر مفصلی نگه داشته شده است. سیستم در دوجهت توسط کابل های فولادی با سطح مقطع A و مدول الاستیسیته E مهاربندی شده است. همچنین هریک از کابل ها تحت پیش تنیدگی بالایی قرار گرفته است. با صرفنظر از وزن کابل ها و ستون ها، مطلوبست تعیین معادله حرکت، برای ارتعاش آزاد کف صلب در دو راستای متعامد x و y .

جواب: در ابتدا فرض می شود که تنها بادبندهای موجود در یک صفحه، در مقابل حرکت جانبی سازه در همان صفحه مؤثر می باشند. در مورد ارتعاش آزاد سیستم بدون میرایی داریم: $m\ddot{x} + kx = ۰$



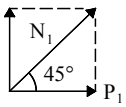
که در این رابطه (kx) بیانگر نیروی افقی لازم برای جا به جایی افقی کف صلب به اندازه x می باشد. با جا به جایی کف، مطابق شکل فوق، نیروی ناشی از تغییرِ طول هر بادبند با تقریب مناسبی برابر است با:

نیروی محوری یک بادبند:

$$\delta L \approx x\cos ۴۵^\circ = x\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \Rightarrow \quad N_۱ = \frac{EA}{L}\left[x\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right] = \frac{EA}{h\sqrt{۲}}\left[x\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]$$

مؤلفه افقی نیروی یک بادبند:

$$P_۱ = N_۱\cos ۴۵^\circ = \frac{EA}{h\sqrt{۲}}\left[x\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right]\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{EA}{h}\frac{\sqrt{۲}}{۴}x$$



* در صفحه قبل، مؤلفه افقی نیروی محوری ایجاد شده در یک بادبند به خاطر حرکت جانبی کف به اندازه x تعیین شد. بر اساس فرض مسأله **پیش تنیدگی بالایی** در بادبند ها موجود می باشد. این پیش تنیدگی باعث می شود که با حرکت جانبی قاب، نیروی کششی در یک بادبند بیشتر شده و در بادبند بعدی کمی کاهش یابد؛ با این حال هر دو بادبند در کشش بوده و در سختی سیستم مؤثر می باشند. بنابراین در حرکت در راستای x، در کل **چهار بادبند** در مقابل جابجایی جانبی مقاومت خواهند کرد.

در نتیجه داریم:

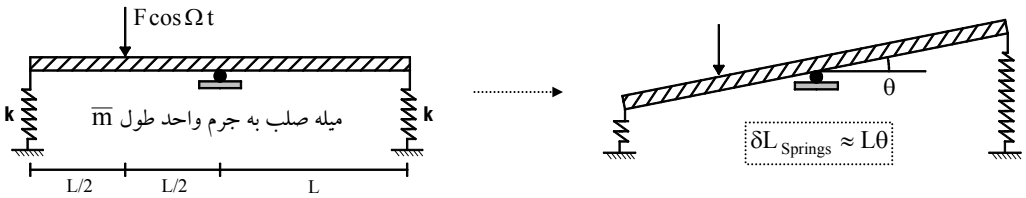
$$(kx) = ۴P_۱ = ۴ \times \frac{EA}{h}\frac{\sqrt{۲}}{۴}x = \sqrt{۲}\frac{EA}{h}x \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + \left(\sqrt{۲}\frac{EA}{h}\right)x = ۰}$$

با توجه به تساویِ ابعاد و سختی سازه در راستای y و x می توان نوشت:

$$\boxed{m\ddot{y} + \left(\sqrt{۲}\frac{EA}{h}\right)y = ۰}$$

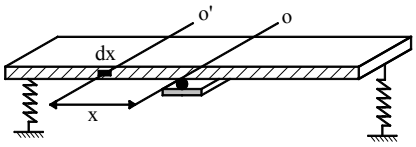
۲-۱) مطلوبست تعیین معادله حرکت برای دستگاه نشان داده شده در شکل زیر، تحت بار وارد بر آن.

جواب: برای بررسی سیستم یک درجه آزادی، مطابق شکل، دوران θ مبنای محاسبات قرار داده می‌شود:



با در نظر گرفتن درجه آزادی دورانی، در مورد معادله حرکت داریم:

$$I_o\ddot{\theta} + \bar{k}\theta = M(t)$$



که در مورد I_o داریم:

$$I_o = \underbrace{I_{o'}}_{\approx \text{صفر}} + \int_{-L}^{L}\bar{m}x^۲dx = \frac{۲}{۳}\bar{m}L^۳$$

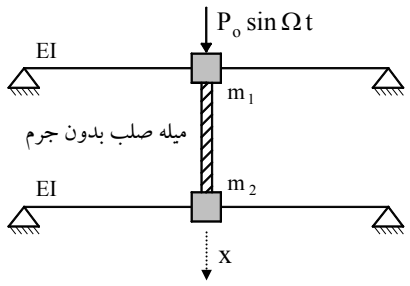
همچنین $(\bar{k}\theta)$ نمایانگر لنگر بازگرداننده می باشد:

$$(\bar{k}\theta) = ۲ \times [k \times L\theta] \times L = ۲kL^۲\theta$$

در نتیجه خواهیم داشت:

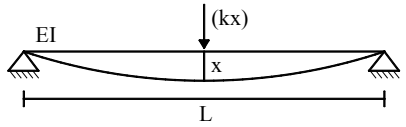
$$I_o\ddot{\theta} + \bar{k}\theta = M(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\frac{۲}{۳}\bar{m}L^۳\right)\ddot{\theta} + ۲kL^۲\theta = \frac{FL}{۲}\cos\Omega t}$$

۲-۲) مطلوبست تعیین معادله حرکت برای دستگاه نشان داده شده در شکل زیر، تحت بار وارد بر آن.



جواب: مطابق شکل سیستمی با جرم کل $(m_1 + m_2)$ مدّ نظر می‌باشد که سختی دو تیرِ مجزا در برابر جابه‌جایی آن مقاومت می کنند. در مورد معادله حرکت داریم: $m\ddot{x} + \bar{k}x = P(t)$

که در این رابطه $\bar{k}$ نشان دهنده سختی کل سیستم می‌باشد. بر اساس مقاومت مصالح در این مورد داریم:



$$(kx) = \frac{48EI}{L^3}x \quad \Rightarrow \quad (\bar{k}x) = 2 \times (kx) = \frac{96EI}{L^3}x$$

در نتیجه:

$$m\ddot{x} + \bar{k}x = P(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{(m_1 + m_2)\ddot{x} + \left(\frac{96EI}{L^3}\right)x = P_o \sin(\Omega t) + (m_1 + m_2)g}$$

* در رابطه فوق x برابر مجموع تغییرمکان استاتیکی و دینامیکی می باشد. می توان اثر تغییرمکان استاتیکی را از این رابطه حذف نمود:

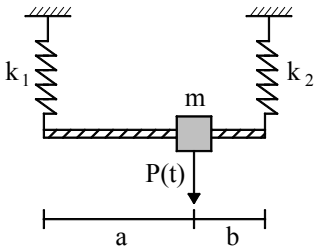
$$(\bar{k}x) = \frac{96EI}{L^3}x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{st} = \frac{(m_1 + m_2)gL^3}{96EI}}$$

لذا معادله حرکت به شکل مقابل ساده می شود:

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{\bar{x}} + \left(\frac{96EI}{L^3}\right)\bar{x} = P_o \sin \Omega t}$$

که در این رابطه $\bar{x}$ نشان دهنده تغییر مکان دینامیکی جرم $(m_1 + m_2)$ بعد از تغییرمکان x_{st} می باشد.

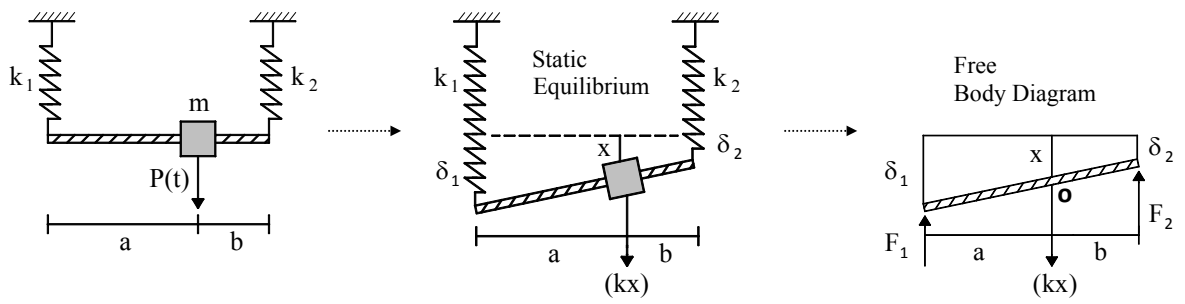
۲-۳) مطلوبست تعیین معادله حرکت برای دستگاه نشان داده شده در شکل زیر، تحت بار وارد بر آن.



(میله صلب بدون وزن می باشد)

جواب: برای تعیین سختی، مطابق شکل صفحه بعد، وضعیتی از تعادل استاتیکی بررسی می شود که جرم m به اندازه x جا به جا شده است. نیروی لازم برای این جا به جاییِ استاتیکی، سختی کل سیستم را مشخص می کند.

(شکل در صفحه بعد)



$$\sum M_o = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 a = F_2 b \quad \Rightarrow \quad k_1 \delta_1 a = k_2 \delta_2 b \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = \left(\frac{k_1 a}{k_2 b}\right)\delta_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 \delta_1 + k_2 \delta_2 = (kx) \xrightarrow[\delta_2 = \left(\frac{k_1 a}{k_2 b}\right)\delta_1]{\text{Eq.1}} (kx) = \left(\frac{a+b}{b}\right) k_1 \delta_1 \qquad (2)$$

$$\frac{\delta_1 - \delta_2}{a+b} = \frac{\delta_1 - x}{a} \quad \Rightarrow \quad \delta_1 b + \delta_2 a = (a+b)x \xrightarrow{\text{Eq.1}} \delta_1 = \left(\frac{a+b}{k_2 b^2 + k_1 a^2}\right) k_2 b x \qquad (3)$$

که معادله سوم از هندسه و بر اساس شیب میله صلب حاصل شده است. حال با استفاده از روابط ۲ و ۳:

$$\xrightarrow{\text{Eq.2}} (kx) = \left(\frac{a+b}{b}\right) k_1 \delta_1 \xrightarrow[\delta_1 = \left(\frac{a+b}{k_2 b^2 + k_1 a^2}\right) k_2 b x]{\text{Eq.3}} \boxed{(kx) = \left(\frac{k_1 k_2 (a+b)^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2}\right) x}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$m\ddot{x} + kx = P(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{m\ddot{x} + \left(\frac{k_1 k_2 (a+b)^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2}\right) x = P(t) + mg}$$

* در رابطه فوق x برابر مجموع تغییرمکان استاتیکی و دینامیکی می باشد. می توان اثر تغییرمکان استاتیکی را از این رابطه حذف نمود. بدین منظور با استفاده از رابطه سختی کل سیستم خواهیم داشت:

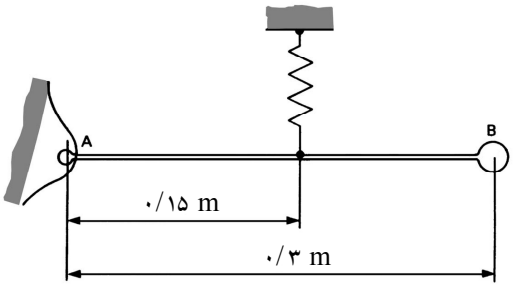
$$(kx) = \left(\frac{k_1 k_2 (a+b)^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2}\right) x \xrightarrow{\text{Applied Load} = mg} \boxed{x_{st} = \left(\frac{k_1 a^2 + k_2 b^2}{k_1 k_2 (a+b)^2}\right) mg}$$

لذا معادله حرکت به شکل مقابل ساده می شود:

$$\boxed{m\ddot{\bar{x}} + \left(\frac{k_1 k_2 (a+b)^2}{k_1 a^2 + k_2 b^2}\right) \bar{x} = P(t)}$$

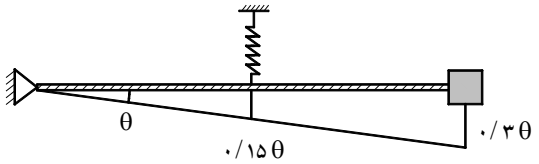
که در این رابطه $\bar{x}$ نشان دهنده تغییر مکان دینامیکی جرم m بعد از تغییرمکان استاتیکیِ x_{st} می باشد.

۳) میله صلب AB مطابق شکل زیر در یک انتها به صورت مفصلی و در وسط به کمک فنری با سختی ۲ kN/m نگه داشته شده است. میله دارای جرم ۱۰ کیلوگرم بوده و وزنه ای به جرم ۷ کیلوگرم به انتهای آن متصل شده است. مطلوبست تعیین فرکانس طبیعی ارتعاش این مکانیزم بر اساس شکل زیر.



جواب: در مورد فرکانس داریم: $f_n = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

با توجه به شکل زیر و با در نظر گرفتن درجه آزادی دورانی، رابطه فرکانس طبیعی به شکل زیر تغییر می کند:



$$\boxed{f_n = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\chi}{I_A}}} \quad (۱)$$

* در مورد ممان اینرسی جرمی داریم: $I_A = [\int_{o}^{۰/۳} \frac{۱۰}{۰/۳} x^۲ dx] + [۷ \times ۰/۳^۲] = ۰/۹۳ \ kg.m^۲$

در مورد سختی دورانی نیز: $(\chi\theta) = ۲۰۰۰ \times ۰/۱۵\theta \times ۰/۱۵ = ۴۵\theta \quad \Rightarrow \quad \chi = ۴۵ \ \frac{N.m}{rad}$

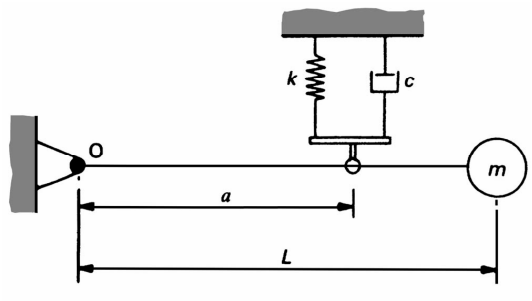
نهایتاً با جاگذاری نتایج فوق در رابطه شماره ۱ فرکانس طبیعی ارتعاش مکانیزم فوق تعیین می شود:

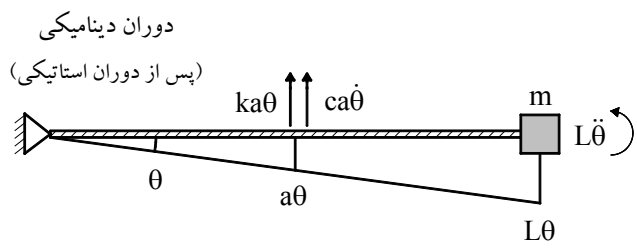
$$f_n = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{\chi}{I_A}} = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۴۵}{۰/۹۳}\frac{N.m}{kg.m^۲}} \xrightarrow{۱ N = ۱ \frac{kg.m}{sec^۲}} f_n = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{۴۵}{۰/۹۳}\frac{۱}{sec^۲}} = \boxed{۱/۱ \ Hz}$$

---

۴) با در نظر گرفتن میرایی بحرانی برای میراگر، و دوران اولیه $\theta_o = ۲°$ مطلوبست تعیین معادله حرکت جرم متمرکز m. همچنین با فرض فرکانس دورانی طبیعی ۳ rad/sec مطلوبست تعیین تغییرمکان پس از یک ثانیه. نهایتاً مفهوم کاهش لگاریتمی دامنه را برای نسبت میرایی ۸۰٪ بیان و محاسبه نمائید.

جواب: به شکل صفحه بعد توجه شود.





* با دوران ابتدای تیر به اندازه θ، محل فنر به اندازه ($a\theta$) جا به جا می شود. به شکل مشابه، با مبنا قرار دادن سرعت دورانی ابتدای تیر، با ایجاد سرعت $\dot{\theta}$، در محل میراگر سرعت ($a\dot{\theta}$) مشاهده خواهد شد. و همین مسأله در مورد شتاب نیز قابل تعمیم می باشد. درنتیجه با بررسی تعادل دینامیکی حول o داریم:

$$mL^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + ka^2\theta = 0 \xrightarrow{\theta = Ge^{st}} mL^2s^2 + ca^2s + ka^2 = 0 \Rightarrow$$

$$s = \frac{-ca^2}{2mL^2} \pm \sqrt{\left(\frac{ca^2}{2mL^2}\right)^2 - \omega_n^2} \xrightarrow{c = c_{cr} = 2mL^2\omega_n} \boxed{s_1 = s_2 = \frac{-c_{cr}a^2}{2mL^2} = \omega_n}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله برابر است با:

$$\theta(t) = (G_1 + G_2 t)e^{-\omega_n t} \quad (1)$$

با جاگذاری شرایط اولیه داریم:

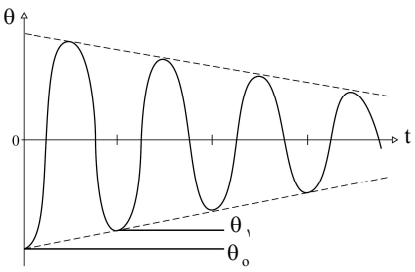
$$\begin{cases}\theta(0) = \theta_o \\ \dot{\theta}(0) = 0\end{cases} \xrightarrow{Eq.1} \begin{cases}G_1 = \theta_o \\ G_2 = \theta_o\omega_n\end{cases}$$

در نتیجه معادله حرکت جرم متمرکز حاصل می شود:

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o(1 + \omega_n t)e^{-\omega_n t}}$$

و برای مقدار عددی مورد نظر مسأله نیز داریم:

$$\theta(1) = 2(1+3)e^{-3} \Rightarrow \boxed{\theta(1) = 0/4^\circ}$$



* مطابق نمودار، میرایی سیستم باعث کاهش دامنه جابه‌جایی با گذشت زمان می‌شود. این کاهش براساس رابطه زیر بیان می شود.

براساس فرض مسأله:

$$\delta = \ln\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \xrightarrow{\xi = 0/8} \delta = \frac{2\pi \times 0/8}{\sqrt{1-0/8^2}} \Rightarrow \boxed{\delta = 8/38}$$